

オプションによるオプションのヘッジを可能にする 二重 Deep Hedging 機構

Nested Deep Hedging Mechanism for Multiple Options Hedging

平野 正徳^{1*} 今城 健太郎² 南 賢太郎² 島田 拓弥²
Masanori HIRANO Kentaro IMAJO Kentaro MINAMI Takuya SHIMADA

¹ 東京大学
The University of Tokyo

² 株式会社 Preferred Networks
Preferred Networks, Inc.

Abstract: Deep Hedging, which uses deep learning and price time-series simulations to optimize option hedging, has recently been in the spotlight because it enables more realistic hedging that can take into account frictions such as transaction fees (imperfect market). However, the situation of hedging an option by other options has never been addressed by deep hedging because of its simulation difficulties. In that situation, pricing for tradable options should also be performed via deep hedging in simulations for realizing imperfect market simulations, which has required unrealizable enormous computational resources because of the nested architecture of deep hedging. Thus, in this study, we proposed a new deep-hedging mechanism for learning hedging strategies under such a nested situation. As a result, we showed better hedging via proposed deep hedging with multiple tradable options.

1 はじめに

デリバティブ(金融派生商品)の一種のオプション取引は、ヘッジ目的を中心に、金融市場において必要不可欠なものである。オプションは、原資産の価格変動に応じてその価値が変動する。ヨーロピアンオプションの場合、それぞれのオプションの行使価格 K で満期に売り(put)/買い(call)する権利を売買することになる。オプションの現在価値の計算で一般に使用される Black-Scholes モデル [7, 23] は、原資産の価格リターンに正規分布を仮定しているほか、取引コストを考慮しない完全市場での論理に基づいている。そのため、実務においては、Black-Scholes モデルにより算出される greeks を参考指標として用いて、ヘッジ戦略を人間が立てることになる。

そこで、不完全市場におけるオプションのヘッジやプライシングを行うツールとして、Deep Hedging [9] が提案された。これは、ヘッジ戦略における、各オプションや原資産のポジションをニューラルネットワークを用いて算出し、強化学習的なフレームワークで、最終的な Profit&Loss (PL) を最適化することを目的としており、取引コストなどを加味したヘッジ戦略を立てることに優位性がある。加えて、最適化に当たって、CVaR(Expected Shortfall) のような目的関数を設定し

て、目的に応じたヘッジを行うこともできる。理論上は、Black-Scholes モデルのような古典理論に基づいていないため、理論モデルのないオプションについても、ヘッジとプライシングが行えるという利点がある。

Deep Hedging の良さは、架空の原資産価格の時系列を生成することで、オプション取引のシミュレートを通じた学習が行えることであり、ある種の Data Augmentation として機能する。これは、Deep Hedging の強みである一方で、ナイーブな実装による拡張の限界を生み出す。

実務で頻繁に行われるオプションをオプションでヘッジするシチュエーション¹を考えた場合に、ヘッジツールとして使用する取引可能なオプションの価格を、シミュレーション内でどのように設定するかという問題が発生する。取引可能なオプションのプライシングを Black-Scholes モデルのような完全市場の仮定のなかで生成された価格を採用してしまうと、Deep Hedging の良さが失われてしまう。そのため、ヘッジツールのオプションに関しても、不完全市場を想定した Deep Hedging によるプライシングが行われる必要がある。ヘッジ戦略を立てるメインのシミュレーションとニューラルネットワークに加えて、そのシミュレーションのサブルーチンとして、ヘッジツールのプライシングを行うため

*E-mail: research@mhirano.jp
URL: https://mhirano.jp

¹本稿では、同一原資産のオプション間でのヘッジを指すこととする

のシミュレーションとニューラルネットワークが必要になる。このネスト構造は、従来の Deep Hedging をナイーブに実装した場合には、一般に実現不可能なレベルの計算量を必要とする。

そこで、本研究では、オプションをオプションでヘッジする Deep Hedging の実現のために、より効率的なモデルを提案する。具体的には、ヘッジツールとして使用するオプションの価格付けモデルの学習において、1つのニューラルネットワークの学習において、残存期間の異なるケースを混合し、それらを効率の良いスケジューリングで学習させることと、学習時のシミュレーターの挙動を変更することで、効率的なモデル学習を実現した。また、オプションをオプションでヘッジすることにより、従来の Deep Hedging で実現されていたオプションを原資産でヘッジするケースと比較して、CVaR を効用関数として採用した場合に、リスクを軽減できるヘッジが行えることを示す。

2 先行研究

Black-Scholes モデル [7, 23] はオプションの価格構造をとらえるモデルとして使用されてきた。一方で、オプション一般に適用可能ではない上、現物価格時系列にランダムウォークを仮定しており、これが現実と乖離していることやボラティリティが一定であるという仮説が不適切であること [2] などから、そのモデルの限界も示されている。そこで、異なる価格確率過程モデルを採用した CEV モデル [6] や価格ジャンプを考慮したジャンプ拡散モデル [12, 24]、すべての価格変化をジャンプと考えた Variance-Gamma モデル [21] が提案された。

ニューラルネットワークの登場により、その活用も検討されてきた。Hutchinson ら [19] や Garcia ら [16] は、MLP によって、Black-Scholes モデルを置き換えることが可能であることを示した。Malliaris ら [22] は、ニューラルネットワークを用いることで、implied volatility をうまく予測できることを S&P100 の指数オプションを用いて示した。Carverhill ら [11] は、MLP を用いて、S&500 先物オプションのプライシングと greeks の予測を通じて、価格変動を予測することで、Cox-Ross-Rubinstein Option Pricing Model [13] よりも高い性能を達成した。Dugas ら [15] は、オプションの価格の特性を、ニューラルネットワークの学習上の制約として取り込み、Yang ら [25] は、ゲート付きの MLP として取り込むことでより正確なプライシングを達成した。Ackerer ら [1] は、Neural Network を用いて、よりなめらかな Volatility Surface を予測するモデルを構築することを通じて、オプションの適切な価格を予測する手法を提案した。

Buehler ら [8, 10] は、オプションのヘッジ問題において、ニューラルネットワークにより、最終的な PL の効用最適化問題を学習させることでそれぞれの効用関数に合わせた最適なヘッジ戦略を構築する “Deep Hedging” と呼ばれる手法を提案した。これは、従来の研究と異なり、オプションのプライシングや Greeks の計算に基づくことなく、直接的にヘッジ戦略を求めることにより、強化学習のフレームワークで最適化を行うことに大きなブレイクスルーがあった。Horvath ら [18] は、rBergomi モデル [5] を用いて、非マルコフ過程の価格のジャンプの存在するラフボラティリティモデルにおいても、Deep Hedging が一定機能することを示すとともに、ラフボラティリティにおける Deep Hedging を提案した。Imaki ら [20] は、No-transaction band [14] をニューラルネットワークのアーキテクチャに組み込むことで、収束の早い Deep Hedging を提案した。

3 問題設定

Deep Hedging [9] 同様に $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ という有限離散時間を考える。図 1 に示すように、現物資産 $S^{(0)}$ とそれに連動する O 個の市場取引可能なオプション $S^{(i)}$ ($i = 1, \dots, O$) が存在すると仮定する。ヘッジ問題として、 $S^{(*)}$ という現物資産 $S^{(0)}$ と連動するオプションのヘッジを $t = 0$ から $t = T$ まで引き受ける (=short する) ことを考える。 $S^{(*)}$ は市場取引可能かどうかは問わない。ただし、 $S^{(*)}$ はヘッジ引受期間に取引を行うことはできないこととする。

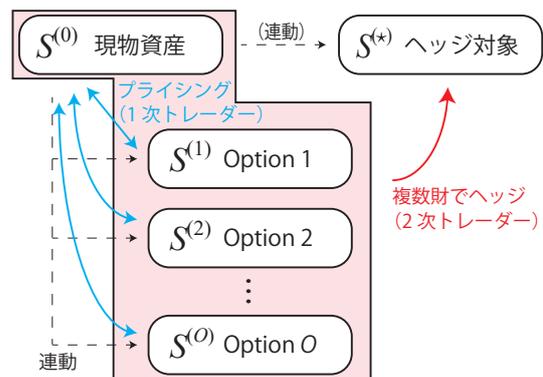


図 1: 問題設定のアウトライン

本研究で取り扱うオプション $S^{(i)}$ ($i = 1, \dots, O$) については、その価格を Black-Scholes model などで定めるのではなく、現物との間でのヘッジ取引に基づいた価格設定を行うことで、すべてにおいて不完全市場の仮定を取り込めるようにする。そのため、図 1 に示すように、オプション $S^{(i)}$ ($i = 1, \dots, O$) と現物 $S^{(0)}$ の間で取引を行うトレーダーを「1次トレーダー」、それらのすべての財を用いてヘッジ対象である資産 $S^{(*)}$

をヘッジするトレーダーを「2次トレーダー」と呼ぶこととする。最終的な目的は、この「2次トレーダー」の取引において、Deep Hedgingを用いることができるようにすることである。また、1次トレーダーはマーケットの代用であるものの、現物とのヘッジが可能であるため、取引可能オプションの流動性も担保できる。

また、問題を単純化するために、金利については、無視できることとし、今回取り扱うオプションはすべて満期が T であると仮定したが、提案手法自体はどちらもそれ以外のケースに対応可能である。加えて、現実の市場では、原資産のボラティリティは直接観測不可能であるが、簡便化のため、価格過程から直接観測可能であると仮定している。

3.1 市場取引価格設定

市場で取引可能な資産 $S^{(i)}$ ($i = 0, \dots, O$) は、プライシングが行われている必要がある。ここでは、現物資産 $S^{(0)}$ とそのオプション $S^{(i)}$ ($i = 1, \dots, O$) のプライシングについてそれぞれ説明する

3.1.1 現物資産価格

現物資産 $S^{(0)}$ の価格 $S_t^{(0)}$ ($t \in \{t_0, \dots, t_n\}$) は Heston model [17] によって決まるとする。

$$dS_t^{(0)} = S_t^{(0)} \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} \quad (1)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^{(2)}. \quad (2)$$

ここで、 $dW_t^{(1)}$ と $dW_t^{(2)}$ は相関係数が ρ となるようなウィナー過程である。この微分方程式のシミュレーションとしては、QE-M Method [3] を用いることとした。本研究においては、 $S_{t_0}^{(0)} = 1.0$, $V_{t_0} = 0.04$, $\kappa = 1.0$, $\theta = 0.04$, $\rho = -0.7$, $\sigma = 0.3$ とした。

3.1.2 オプション価格 (1次トレーダー)

続いて、現物資産と連動して価格が変動するオプションの価格については、Deep Hedging [9] のプライシングを採用することとした。実務的には、Black-scholes model [7] に基づいたプライシングを行うことが一般的ではあるものの、最終的に取引コストなどを考慮したヘッジを Deep Hedging で行うためには、ヘッジのツールとして使われるオプションの価格自体も取引コストなどを考慮に入れたプライシングが行われるべきである。そこで、Deep Hedging を用いて、 $S^{(i)}$ ($i = 1, \dots, O$) のオプションのプライシングを、その原資産 $S^{(0)}$ でヘッジすることで計算を行うこととする。

具体的には、 $t = t_j$ における、オプション $S^{(i)}$ の価格は以下の通りに定められる。

1. 時刻 $t = t_j$ にオプション $S^{(i)}$ を 1 単位 short する。この時の 1 単位の価格 $S_t^{(i)}$ を計算したいので未知であるとする。
2. 時刻 $t = t_j$ から満期 $t = t_n = T$ までの間、現物資産 $S^{(0)}$ の取引を行う (proportional cost を適用)
3. 満期において、オプション $S^{(i)}$ をその行使価格に基づいて清算する

上記の手続きにおいて最適ヘッジ戦略を取れたとすると、裁定機会が存在しないので、キャッシュフローの合計は 0 になるはずである。上記のキャッシュフローを定式化すると以下の通りになる。

$$S_{t_j}^{(i)} - \sum_{k=j}^{n-1} \left\{ \left(\delta_{t_k}^{(0)} - \delta_{t_{k-1}}^{(0)} \right) S_{t_k}^{(0)} + c_0 \left| \delta_{t_k}^{(0)} - \delta_{t_{k-1}}^{(0)} \right| S_{t_k}^{(0)} \right\} + \delta_{t_{n-1}}^{(0)} S_{t_n}^{(0)} - Z_i(S^{(i)}) = 0. \quad (3)$$

ここで、 $\delta_t^{(0)}$ は時刻 t での取引終了後の現物資産 $S^{(0)}$ のポジションであり、取引開始前のポジションは $\delta_{t_{j-1}}^{(0)} = 0$ と定義する。 c_0 は現物 $S^{(0)}$ の取引にかかる proportional cost の係数である。 $Z_i(S^{(i)})$ は、オプション $S^{(i)}$ の満期での payoff であり、行使価格を $K^{(i)}$ とすると、European Call Option の場合、

$$Z_i(S^{(i)}) = \max(S_{t_n}^{(i)} - K^{(i)}, 0) \quad (4)$$

となる。

Deep Hedging を用いるため、取引戦略そのものである現物のポジション $\delta_{t_k}^{(0)}$ はニューラルネットワークを用いて

$$\delta_{t_k}^{(0)} = \text{NN}_i(I_{t_k}, \delta_{t_{k-1}}^{(0)}) \quad (5)$$

と定義される。この時、 I_t が時刻 t 以前に取得可能なヘッジに有効な情報である。これらの設定で、 $S_{t_j}^{(i)}$ が小さくなるように、 NN_i を学習させる。

3.2 取引戦略 (2次トレーダー)

3.1 節でプライシングが行われた現物 $S^{(0)}$ 及びオプション $S^{(i)}$ ($i = 1, \dots, O$) を用いて、ヘッジ対象のオプション $S^{(*)}$ をヘッジする戦略 (通称「2次トレーダー」) について述べる。

2次トレーダーは、任意の離散時刻 $t \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ において、任意の財 $S^{(i)}$ ($i = 0, \dots, O$) を市場で取引可能である。この制約下で、ヘッジ対象のオプション $S^{(*)}$ を 1 単位をヘッジし、その結果の損益を効用関数にかけたときの効用を最大化することを目指す。

$S^{(*)}$ を $t = t_0$ で顧客に販売したのちの満期までのキャッシュフローは、

$$\begin{aligned} \text{PL}_T(\delta) &= -Z_*(S^{(*)}) + (\delta \cdot S)_T - C_T(S, \delta) \\ (\delta \cdot S)_T &\equiv \sum_{i=0}^O \left\{ \delta_{t_{n-1}}^{(i)} S_{t_n}^{(i)} - \sum_{k=0}^{n-1} (\delta_{t_k}^{(i)} - \delta_{t_{k-1}}^{(i)}) S_{t_k}^{(i)} \right\} \\ C_T(S, \delta) &\equiv \sum_{i=0}^O \sum_{k=0}^{n-1} c_i (\delta_{t_k}^{(i)} - \delta_{t_{k-1}}^{(i)}) S_{t_k}^{(i)} \end{aligned}$$

と定義できる。ここで、 Z_* はオプション $S^{(*)}$ の payoff 関数、 $\delta_t^{(i)}$ は財 $S^{(i)}$ の時刻 t の取引終了後におけるポジション、 c_i は財 $S^{(i)}$ の proportional な取引コストの係数である。 δ は取引対象のすべての財・時刻に対するポジションの組 $\left\{ \delta_{t_j}^{(i)} \mid i \in \{0, 1, \dots, O\}, j \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$ である。ただし、 $\delta_{t_{-1}}^{(i)} = 0$ とする。

そのうえで、効用関数 u に基づいて、以下の目的関数 J を最大化する。

$$J(\delta) = \mathbb{E}[u(\text{PL}_T(\delta))]. \quad (6)$$

本研究においては、効用関数として CVaR0.1 を採用している。

ポジション δ 自身がヘッジ戦略となる。このポジションに関しては、ニューラルネットワークを通じて得られる。時刻 t に対する $S^{(i)}$ ($i = 0, \dots, O$) のポジションの組を $\delta_t = \left\{ \delta_t^{(i)} \mid i \in \{0, 1, \dots, O\} \right\}$ と定義する。この時、

$$\delta_{t_k} = \text{NN}(I_{t_k}, \delta_{t_{k-1}}) \quad (7)$$

となる。ここで、NN は出力が $O + 1$ 個になるようなニューラルネットワークとなる。また、 I_t が時刻 t 以前に取得可能なヘッジに有効な情報である。このニューラルネットワークを $J(\delta)$ が最大化されるように学習させることで、2次トレーダーの取引戦略は学習される。

4 提案手法

3節で設定した現実のヘッジ行動に近い問題において、Deep Hedging を適用するための手法を提案する。

今回取り組む問題において、二重のシミュレーション構造の存在が問題になる。3.1節に記載した通り、本研究においては、シミュレーションデータに基づいたヘッジ戦略の最適化を考えている。この場合、2次トレーダーのシミュレーションを行うにあたって、すでに戦略を学習済みの1次トレーダーの提示するプライシングが必要になる。しかし、このプライシングを行うためには、それぞれの状態に合わせた1次トレーダーの学習が必要となる。この学習のために、2次トレー

ダーのシミュレーションのサブルーチンとして、1次トレーダーのサブシミュレーションに基づいた繰り返しの取引戦略の学習と最終的な推論による取引戦略に基づいたプライシングが要求される。この計算量は、現実的な計算量を超えるものであり、実務における Deep Hedging の導入を妨げるものであった。

計算量の爆発が発生する主な原因は、従来の Deep Hedging において、オプションのプライシングを行う時点までの時系列が既知であり、それ以降をシミュレーションで補完して戦略を学習するという手法である点と、残存期間が変化すると、ニューラルネットワークの再帰呼出回数が変化するため(後述)、学習自体に大きな変化が発生してしまうということにある。

そこで、残存期間の変化にも対応して学習を行うことができる学習手法の提案を行うことにより、2次トレーダーの各シミュレーションにおいて、1次トレーダーのプライシングのためのヘッジ戦略を学習し直しを発生させないことで、計算量の削減を目指す。

4.1 プライシングのための Deep Hedging モデル (1次トレーダー)

1次トレーダーはオプションごとにモデルを構築する。1次トレーダーモデルにおける工夫点は以下の3つである。

1. 残存期間の異なるケースの混合学習
2. 残存期間に基づいた学習スケジューリング
3. 学習時と推論時で挙動が異なるシミュレーション

残存期間の異なるケースの混合学習: 図2のとおり、今回のプライシングモデルが対応すべきヘッジシチュエーションは多様であり、これを一つのニューラルネットワークで行える必要がある。図2の★の部分にあたる、スタート時点でのヘッジは、ほかの局面と異なり、ポジションが0からスタートする点で特異であり、かつ、残存期間がすべて異なるケースを1つのニューラルネットワークで対応しなければならない。また、2回目以降のヘッジであっても、残存期間によって、リスクの勘案や取引戦略が異なり得るが、これらへの対応も必要である。

図2に記載したすべてのケースでのプライシングを最適化するような学習を実行するために、これらの $t = 0$ でのプライシングを計算するケースから $t = t_{n-1}$ でのプライシングを計算するケースまでのすべてのケースを学習すべきシナリオとして学習させることとした。 $t = 0$ でのプライシングを計算するケースは、単純な従来の Deep Hedging そのものになるが、 $t = t_i$ でのプライシングを計算するケースは、 $t = t_{i-1}$ までが取引禁止期間として設定されているとみなす。

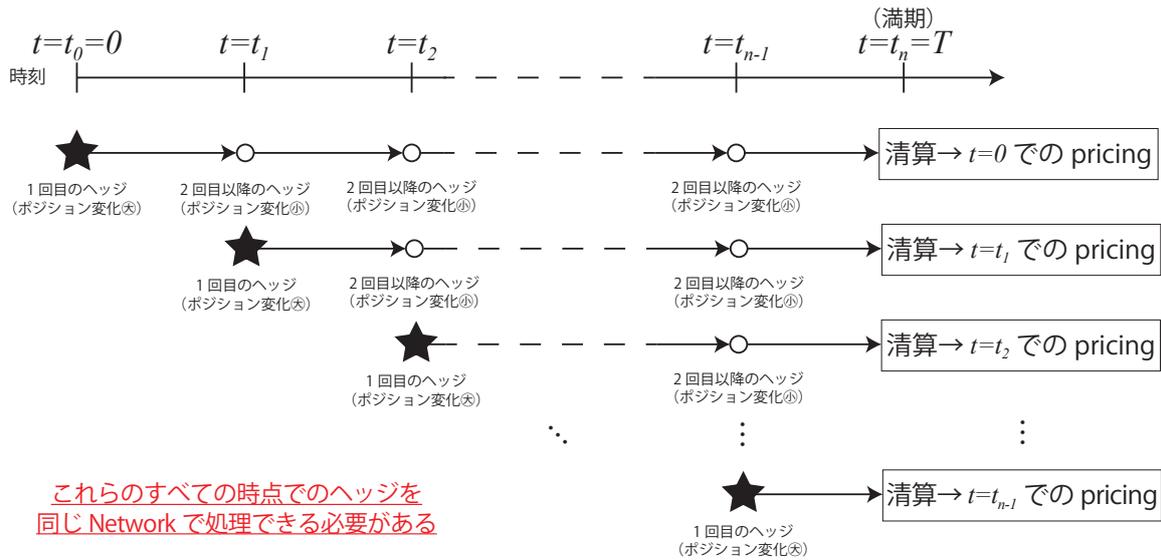


図 2: プライシングのための Deep Hedging モデルが対応すべきヘッジシチュエーション

残存期間に基づいた学習スケジューリング: 式 3 を変形すると、時刻 $t = t_j$ におけるオプション $S^{(i)}$ 1 単位の価格 $S_{t_j}^{(i)}$ は、 $\delta_{t_j}^{(0)}, \dots, \delta_{t_{n-1}}^{(0)}$ の関数であるとわかる。

$$\begin{aligned} \delta_{t_{n-1}}^{(0)} &= \text{NN}_i(I_{t_{n-1}}, \delta_{t_{n-2}}^{(0)}) \\ &= \text{NN}_i(I_{t_{n-1}}, \text{NN}_i(I_{t_{n-2}}, \delta_{t_{n-3}}^{(0)})) = \dots \end{aligned}$$

というように、ヘッジを重ねるごとに、ネットワークのネストが深くなっていく構造となっている。ネットワークのネストが深くなることは、深層学習におけるグラフ構造が大きくなっていくために学習が難しくなることを意味する。そこで、1epoch 内の学習において、もっともネストの少ない $t = t_{n-1}$ でのプライシングを計算するケースから順に学習 (backpropagation + NN の重み更新) を行う。²これは、ヘッジ行動の 1 回目 (図 2 の★) は主に Delta ヘッジと同等のヘッジを行うことになり、そのヘッジの精度が低いと、後続のヘッジ行動にも大きな影響を及ぼすが、このヘッジ行動の学習は、式 3 のネストが最も深い場所で行われる。そのため、学習が困難であるので、ネスト構造の浅いものから順に学習を行うことが有効であると考えられる。

学習時と推論時で挙動が異なるシミュレーション: 図 3 で示す通り、1 次トレーダーの学習時と、1 次トレーダーが推論としてオプション価格を計算する時でシミュレーションの構造を変えた。

今回我々が取り組む Deep Hedging の問題は、二重のシミュレーション構造を持っている。たとえば、 $t = t_i$ において、2 次トレーダーがオプションの価格を 1 次

トレーダーから参照するシチュエーションを考える。 $t = t_i$ までの価格時系列は、シミュレーションによって生成されているが、この時点では既知のもののみなすことができる。一方で、 $t = t_i$ からの時系列は未知である。そこで、1 次トレーダーは、 $t = t_i$ までの既知の時系列の続きとして、架空の現物価格のパスをたくさん生成して、その PL に基づいたオプションプライシングを行うことになる (図 3 の左図)。そのため、1 つのシミュレーションで生成された価格時系列から派生して多くのシミュレーションを走らせる構造を持つ。この点は、実際に 2 次トレーダーが 1 次トレーダーの提示するオプション価格に基づいて取引戦略を学習する局面、つまり、1 次トレーダーが推論モードとして挙動する場合には不可欠であるが、1 次トレーダーの学習においては、このネスト構造を維持する必要がない。

そこで、学習時においては、より効率的な学習を行うために、図 3 の右図にあるように、未知の価格パスは 1 系列しか生成しないかわりに、既知の価格を生成するシミュレーションの回数を増やすことにした。未知の価格のパスを 1 系列にすることにより、満期までの価格時系列を一気に生成したのちに、 $t = t_i$ 以降を未知の価格として見ることで、実質的にシミュレーションのネスト構造を回避できる。これは、1 次トレーダーの学習において、細かく $t = t_i$ におけるオプション価格を多くのシミュレーションに基づいて正確に計算する必要がなく、各試行における PL を単純に効用最大化する問題として考えることができるからである。さらに、この改良により、 $t = t_i$ において到達する価格時系列の state も多くすることができる。

²すべてのケースで backpropagation 後にまとめて NN の重み更新を行う手法も試したが、個別に重み更新をしていく方が性能と収束の速さがよかった。

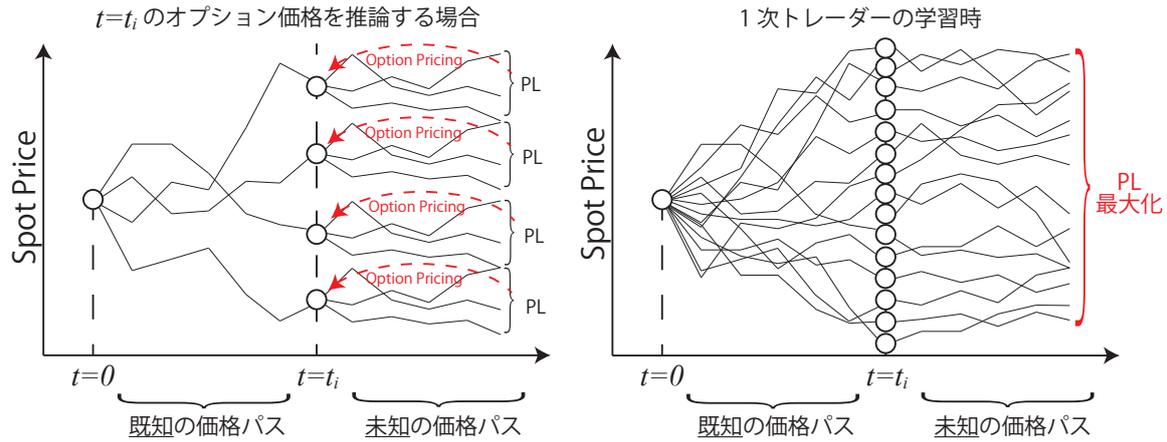


図 3: シミュレーションにおける工夫

4.2 2次トレーダーモデル

2次トレーダーは、現物 $S^{(0)}$ 及びオプション $S^{(i)}$ ($i = 1, \dots, O$) を用いて、ヘッジ対象のオプション $S^{(*)}$ をヘッジするが、こちらについては、従来の Deep Hedging を単純に多数財に拡張したものである。2次トレーダーは、式 6 を最大化するような式 7 のニューラルネットワークの学習を行う。式 7 中の情報 I_t には、1次トレーダーが時刻 t において提示する各オプションの価格も含まれており、それらを用いて、取引を行う $O+1$ 財のポジションをニューラルネットワークで決定する。他については、3.2 節の設定で定義された通りである。 I_t の詳細については実験設定で後述する。

5 実験設定

本研究において、今回提案した現物とオプションをもちいたヘッジに対応した Deep Hedging 手法の有効性を確かめるために、以下の設定で実験を行った。

まず、取引可能な資産は、現物資産 (3.1.1 節で定義。価格は 1.0 からスタート)、行使価格 1.02 の European Call Option、行使価格 1.00 の European Put Option、行使価格 0.98 の European Put Option とし、ヘッジする資産として行使価格 1.00 の European Call Option を設定した。

そのうえで、取引可能な資産を現物資産のみに絞った場合と比較し、ヘッジツールに複数のオプションが含まれる場合にヘッジの性能が上がるかどうかを確認することで、提案手法の有効性を確認することとした。各種パラメータは次のように設定した。

- 満期までの最大ステップ数 $n = 20$
- 現物の取引コスト係数 (Proportional Cost)
 $c_0 = 0, 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001$

- オプションの取引コスト係数 (Proportional Cost)
 $c_i = 0, 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001$
- NN のアーキテクチャ: 1 層の Linear 層による 32 次元への埋め込み後、2 層の self-attention を通ったのちに、1 層の Linear 層で出力する。出力層以外はすべて Layer Normalization[4] と ReLU Activation を適用。
- I_t (NN に入力する情報):
 - ヘッジ対象も含めたすべての Option の log moneyness, 満期までの残存期間
 - 市場取引可能なすべての財の現在の市場価格
 - 原資産のボラティリティ
- 効用関数: CVaR(0.1)
- 1次トレーダーの学習時の Simulation paths: 50000
- 1次トレーダーの学習 epochs: 1000
- 2次トレーダーの学習時の 1次トレーダーの Simulation paths: 1000
- 2次トレーダーの学習時の Simulation paths: 5000
- 2次トレーダーのテスト時の Simulation paths: 5000
- 2次トレーダーの学習 epochs: 500
- NN の Optimizer: Adam (learning rate = 10^{-3})

なお、実装に当たっては、pfhedge³を用いた。

6 結果

表 1 に、取引コストを変化させた場合の、プライシングの結果を示す。まず、オプションを現物のみでヘッジする 1次トレーダ⁴とオプションをオプションと現物でヘッジする 2次トレーダーのオプション $S^{(*)}$ に対するプライシングを比較すると、すべての条件において 2次

³<https://github.com/pfnet-research/pfhedge>

⁴厳密には取引可能なオプションのプライシングを行う 1次トレーダーとは効用関数が異なるが、便宜上 1次トレーダーと呼ぶ。

表 1: ヘッジ結果. ここでは PL ではなく、価格またはコストとして表示しているの、基本的に正の値を取る. 小さい方が良いヘッジであることを示す. また, CVaR0.1 分布の 90%地点 (上側 10%地点) 以上の平均であるのに対し, ヘッジコスト平均は分布全体の平均を見ていることから, 同じ分布の着目する位置を変えているのと考えられる. そのため, ヘッジコスト平均の方が値が小さくなるのは自明である.

設定 取引コスト比率 (c_0, c_i)	オプション $S^{(*)}$ のプライシング (CVaR0.1)		ヘッジコスト平均	
	1次トレーダー	2次トレーダー	1次トレーダー	2次トレーダー
0	0.031021	0.025074	0.022386	0.022324
0.0001 (0.01%)	0.031085	0.026803	0.022524	0.022381
0.0005 (0.05%)	0.031788	0.027130	0.023189	0.022654
0.001 (0.1%)	0.032733	0.027546	0.023963	0.023099
0.005 (0.5%)	0.038718	0.029559	0.028565	0.024922
0.01 (1%)	0.045051	0.031568	0.033116	0.027135
$c_0 = 0, c_i = 0.01$ (参考)	0.031021	0.024350	0.022386	0.022250
$c_0 = 0.0001, c_i = 0.01$ (参考)	0.031085	0.027239	0.022524	0.022605

トレーダーの方が良い結果であることがわかる. また, 取引コストが上がるにつれて, ヘッジにかかるコストの増加からオプション $S^{(*)}$ のプライシングも上昇していることが確認できる. 今回は効用関数として, CVaR0.1 を採用したので, ヘッジコストの高い上位 10%の平均を取っていることになるが, ヘッジコストの単純平均についても確認したところ, 少なくとも取引コストが大きくない場合には 1 次トレーダーと 2 次トレーダーで大きな差はなかった.

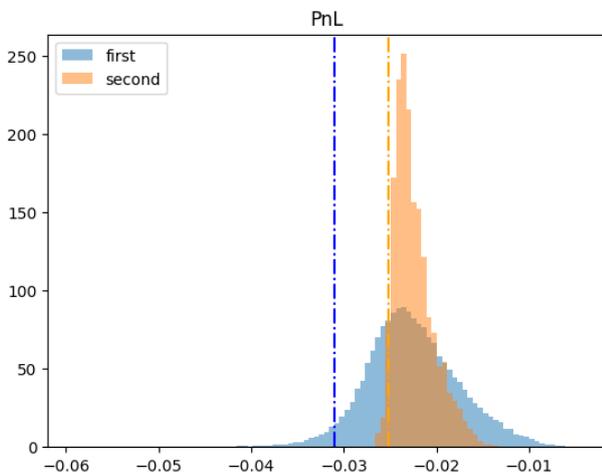


図 4: 1 次・2 次トレーダーの PL 分布. (取引コスト: 0.0001) ヘッジの PL として表示している (ヘッジコストと符号が逆) ため, 主に負の値をとる. 大きい (右) 方がより損失が少なく良いヘッジとなる. 破線はそれぞれの分布の CVaR0.1 の値 ($-S^{(*)}$) と一致.

図 4 で, さらに詳細な PL の分布について確認する. 図 4 では, ヘッジにかかった PL を計算しており, 通常, ヘッジしたい財 $S^{(*)}$ のヘッジにおいては, コスト

がかかる. そのため, ヘッジにかかる PL は負になるが, より大きい値のほうがヘッジコストが少ない良いヘッジができていくことになる. 図 4 を確認すると, オレンジで記載されている, オプションもヘッジのツールとして使える 2 次トレーダーのほうが, そうでない 1 次トレーダーよりもより良いヘッジを見せていることがわかる. 加えて, PL の分布も, 平均は大きく変わらないにもかかわらず, CVaR0.1 の計算に大きくかわってくる下側のテイルをより効果的に圧縮できていることが確認できる.

さらに, 本稿では割愛しているが, ポートフォリオの greeks についても確認したところ, 1 次トレーダーと比較して, 2 次トレーダーのほうが圧倒的に gamma, vega, theta を 0 に近づけることに成功していた.

7 考察

まず, 表 1 の結果について考察する. 表 1 のプライシングを確認する限りでは 2 次トレーダーの方が CVaR0.1 を抑えることに成功していると考えられる. また, コストが 0 の場合に, 1 次トレーダーと 2 次トレーダーのヘッジコスト平均が 0.3%程度の差がないことから, 1 次トレーダーの取引可能オプション $S^{(i)} (i = 1, \dots, O)$ に対するプライシングが, 2 次トレーダーにとって裁定可能な価格ではなかったことを示していると考えられる. これらを総合すると, 2 次トレーダーは単純な裁定機会がなかったにもかかわらず, リスクをうまく低減することができていると考えられる. これらの結果は, 図 4 から裏付けられる.

また, 比較として, リスクセンシティブな CVaR0.1 の代わりにリターン重視の Entropic Risk Measure を用いた実験も行ったが, そちらではオプションを取引可能にすることによる性能向上は確認できなかった. こ

これは、裁定機会がないことと整合性のある結果であり、さらに、オプションを取引可能な Deep Hedging の提案により、リスクを効率的に圧縮することのみが可能になっていることを示していると言える。

ポートフォリオの greeks の結果に関しては、1 次トレーダーでも、オプションと現物間の取引だけでも、delta-free を達成可能であるためである一方で、gamma, vega, theta に関しては、現物だけでは greeks-free にするのが困難であるため、オプションを取引可能な 2 次トレーダーの方がもともとの設定上有利であるためであり、2 次トレーダーがそのアドバンテージを適切に活用できていると言えるだろう。

これらの結果を踏まえると、提案手法により、オプションをオプションを用いてヘッジすることに成功し、その結果として、効率的にリスクの圧縮ができていると考えられる。

今後の課題としては、European Option 以外の Exotic Option などを用いた場合のパフォーマンス確認や、より効率的な学習手法の検討、設定のより現実化や実市場での確認などが考えられる。

8 結論

本研究では、オプションをオプションを用いてヘッジするための Deep Hedging 手法を提案した。ヘッジツールとして用いるオプションに関しても不完全市場下でのプライシングをおこなうべきであるという考えのもと、二重の Deep Hedging 構造を持つ問題設定にも対応できる学習手法を提案することで、計算量の爆発を回避し、従来達成できなかったオプションをオプションを用いてヘッジするというシチュエーションを取り扱えるようになった。提案手法を用いたオプションによるオプションのヘッジは、従来の Deep Hedging で達成されていたヘッジと比較して、効率的にリスクを圧縮できていることが確認できた。

参考文献

- [1] Damien Ackerer, Natasa Tagasovska, and Thibault Vatter. Deep Smoothing of the Implied Volatility Surface. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 33, pages 11552–11563. Neural information processing systems foundation, 2020.
- [2] Vedat Akgiray. Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts. *The Journal of Business*, 62(1):55–80, 1989.
- [3] Leif BG Andersen. Efficient simulation of the heston stochastic volatility model. 2007. <https://ssrn.com/abstract=946405>.
- [4] Jimmy Lei Ba, Jamie Ryan Kiros, and Geoffrey E Hinton. Layer normalization. 2016. <https://arxiv.org/abs/1607.06450>.
- [5] Christian Bayer, Peter Friz, and Jim Gatheral. Pricing under rough volatility. *Quantitative Finance*, 16(6):887–904, 2015.
- [6] Stan Beckers. The Constant Elasticity of Variance Model and Its Implications For Option Pricing. *The Journal of Finance*, 35(3):661, 1980.
- [7] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [8] H. Buehler, L. Gonon, J. Teichmann, and B. Wood. Deep hedging. *Quantitative Finance*, 19:1271–1291, 2019.
- [9] Hans Buehler, Lukas Gonon, Josef Teichmann, and Ben Wood. Deep hedging. *Quantitative Finance*, 19(8):1271–1291, 2019.
- [10] Hans Buehler, Lukas Gonon, Josef Teichmann, Ben Wood, Baranidharan Mohan, and Jonathan Kochems. Deep Hedging: Hedging Derivatives Under Generic Market Frictions Using Reinforcement Learning. *SSRN Electronic Journal*, 2019. <https://ssrn.com/abstract=3355706>.
- [11] Andrew P. Carverhill and Terry H. F. Cheuk. Alternative Neural Network Approach for Option Pricing and Hedging. *SSRN Electronic Journal*, 2003. <https://papers.ssrn.com/abstract=480562>.
- [12] John C. Cox and Stephen A. Ross. The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2):145–166, 1976.
- [13] John C. Cox, Stephen A. Ross, and Mark Rubinstein. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3):229–263, 1979.
- [14] Mark H. A. Davis, Vassilios G. Panas, and Thaleia Zarihopoulou. European Option Pricing with Transaction Costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 31(2):470–493, 2006.
- [15] Charles Dugas, Yoshua Bengio, François Bélisle, Claude Nadeau, and René Garcia. Incorporating Second-Order Functional Knowledge for Better Option Pricing. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 13, 2000.
- [16] René Garcia and Ramazan Gençay. Pricing and hedging derivative securities with neural networks and a homogeneity hint. *Journal of Econometrics*, 94(1-2):93–115, 2000.
- [17] Steven Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6:327–343, 1993.
- [18] Blanka Horvath, Josef Teichmann, and Žan Žurič. Deep Hedging under Rough Volatility. *Risks*, 9(7):138, 2021.
- [19] James M. Hutchinson, Andrew W. LO, and Tomaso Poggio. A Nonparametric Approach to Pricing and Hedging Derivative Securities Via Learning Networks. *The Journal of Finance*, 49(3):851–889, 1994.
- [20] Shota Imaki, Kentaro Imajo, Katsuya Ito, Kentaro Minami, and Kei Nakagawa. No-Transaction Band Network: A Neural Network Architecture for Efficient Deep Hedging. 2021. <https://arxiv.org/abs/2103.01775v1>.
- [21] Dilip B. Madan, Peter P. Carr, and Eric C. Chang. The Variance Gamma Process and Option Pricing. *Review of Finance*, 2(1):79–105, 1998.
- [22] Mary Malliaris and Linda Salchenberger. Using neural networks to forecast the S&P 100 implied volatility. *Neurocomputing*, 10(2):183–195, 1996.
- [23] Robert C Merton. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, pages 141–183, 1973.
- [24] Robert C. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2):125–144, 1976.
- [25] Yongxin Yang, Yu Zheng, and Timothy M Hospedales. Gated Neural Networks for Option Pricing: Rationality by Design. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 31(1), 2017.